

Notas de aula complementares sobre Relatividade Especial para Física IV

Daniel Jonathan

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brazil

(Dated: December 11, 2015)

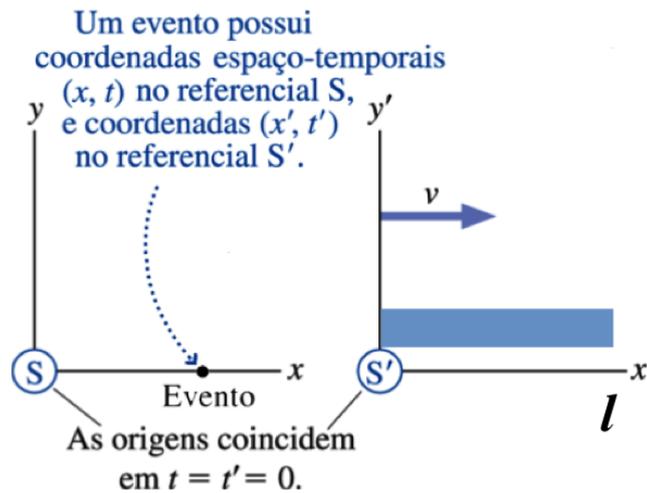
I. INTRODUÇÃO

Nestas notas apresento alguns cálculos e observações sobre a teoria da Relatividade Especial que complementam a discussão no texto adotado pelo curso de Física IV do IF-UFF (Randall Knight 2a ed., vol. 4, cap 37).

II. DERIVAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Nessa seção derivamos as Transformações de Lorentz (eq. 37.23). Relembrando, essas equações nos dizem como obter as coordenadas espaço-temporais de um evento em um certo referencial inercial, dadas as coordenadas do mesmo evento em um outro referencial inercial, em movimento uniforme com respeito ao primeiro.

A derivação que apresentamos aqui evita a suposição simplificadora que o livro-texto faz na eq. 37.20. Ela se baseia em extrapolar a situação particular da contração espacial, analisada na seção 37.7



1o passo: Considere uma régua de comprimento próprio l , se movendo com velocidade v para a direita com respeito a um referencial S (Fig). Chamamos de S' o referencial que acompanha a régua, com origem na sua ponta esquerda. Escolhemos ainda a origem de S de modo que, no instante $t = t' = 0$, as duas origens coincidam (a posição da ponta esquerda da régua vale $x = x' = 0$).

Considere agora o seguinte evento:

Evento 1: após um tempo t medido no referencial S , a ponta *direita* da régua está em algum ponto x .

É fácil determinar quanto vale x , pois pela contração espacial sabemos que o comprimento da régua vale l/γ no referencial S . Essa é a posição da ponta direita no instante $t = 0$. Após um tempo t (medido no ref. S), essa ponta terá então se movido para a posição $x = l/\gamma + vt$.

Por outro lado, no referencial S' a régua está imóvel. A posição da ponta direita sempre tem o mesmo valor $x' = l$. Substituindo acima, podemos concluir então que $x = x'/\gamma + vt$, ou seja:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1)$$

que é a primeira parte das transformações de Lorentz.

Observe agora que, dado um evento qualquer ocorrendo em algum ponto ($x \geq 0, t$), sempre existe alguma régua de velocidade v cuja ponta direita chega no ponto x justamente no instante t . Assim, a relação (1) vale na verdade para qualquer evento nessas posições. No caso de eventos ocorrendo em pontos com $x < 0$, precisamos modificar

ligeiramente o argumento, dessa vez tomando a origem de S' na ponta *direita* da régua e utilizando as coordenadas da ponta esquerda como o nosso ‘Evento 1’. É fácil ver que obtém-se novamente a relação (1). Em outras palavras, ela vale para *qualquer* evento.

Note que podemos imediatamente também aplicar esse argumento para o caso de réguas se movendo para a esquerda (i.e. para a ‘direita’ com velocidade negativa $-v$), de modo a obter a relação inversa

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (2)$$

2o passo: Para deduzir a 2a parte das transformações de Lorentz, a maneira mais simples é prosseguir como sugerido no livro-texto: se obtemos x' a partir de (x, t) usando a eq. (1), e depois calculamos x usando a eq. (2), precisamos retornar para o valor de onde iniciamos. Em outras palavras, substituindo uma eq. na outra temos de ter

$$x = \gamma\left(\gamma(x - vt) + vt'\right)$$

resolvendo para t' :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t + \frac{x}{v\gamma} (1 - \gamma^2) = \gamma t + x \left(\frac{-v^2\gamma^2}{c^2 v \gamma} \right) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad \square \end{aligned} \quad (3)$$

Note que, novamente, podemos também considerar uma régua se movendo para a esquerda, resultando na transformação reversa

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right). \quad (4)$$

Uma outra dedução, mais longa, da eq. (3), mas que talvez ilumina melhor o seu sentido, é a seguinte: voltando à régua da figura, suponha agora que haja um relógio embutido na ponta direita, o qual marca um intervalo de tempo τ entre cada dois ‘tiques’. O relógio é iniciado em $t' = 0$. Vamos definir então o evento

Evento 2: Ocorre o primeiro ‘tique’ do relógio.

No referencial S' , as coordenadas do Evento 2 são $(x'_2, t'_2) = (l, \tau)$. Podemos então usar a relação (2) acima para obter a sua posição no ref. S :

$$x_2 = \gamma(l + v\tau). \quad (5)$$

Agora: como vimos acima, no referencial S a ponta direita começa (em $t = 0$) na posição $x = l/\gamma$. Então para chegar até a posição x_2 , andando com velocidade v , ela leva um tempo

$$t_2 = \frac{\gamma}{v} (l + v\tau - l/\gamma^2) = \gamma \left(\frac{vl}{c^2} + \tau \right) \quad (6)$$

(Obs: note que $t_2 \neq \gamma\tau$, i.e., não podemos aplicar diretamente a fórmula da dilatação temporal! Isso ocorre porque, no referencial S , a inicialização do relógio *não* ocorre em $t = 0$, mas em $t = \frac{\gamma vl}{c^2}$! Você pode deduzir esse fato tomando $\tau = 0$ acima).

Podemos ver então que

$$t_2 - vx_2/c^2 = \gamma \left[\frac{vl}{c^2} + \tau - \frac{vl}{c^2} - \frac{v^2\tau}{c^2} \right] = \tau\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \tau/\gamma \quad (7)$$

Em outras palavras

$$\tau = \gamma \left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \right). \quad (8)$$

Dado porém qualquer evento ocorrendo em algum ponto ($x' \geq 0, t'$), sempre podemos imaginar uma régua e relógio com esses valores de $l = x'$ e $\tau = t'$. Podemos concluir então que, para qualquer evento desses, vale a eq. (3).

(Como acima, se $x' < 0$ podemos adaptar o argumento usando um relógio na ponta esquerda da régua, e com a origem de S' na ponta direita, resultando novamente na eq. (3).)

III. DERIVAÇÃO DA FORMA RELATIVÍSTICA DA ENERGIA CINÉTICA

Nessa seção derivamos a expressão relativística para a Energia cinética de uma partícula:

$$K = (\gamma_p - 1) mc^2, \quad (9)$$

onde $\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ e u é a velocidade do corpo. Lembre-se que para obter a Energia *total* relativística E precisamos somar a esse valor a energia de repouso mc^2 , de modo que

$$E = \gamma_p mc^2. \quad (10)$$

Demonstração da eq. (9): A energia cinética relativística K pode ser definida de forma análoga à feita em Física 1 para o caso Newtoniano: ela corresponde ao trabalho realizado sobre o corpo por forças externas (conservativas), a partir de uma condição inicial em que este está em repouso:

$$K = W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt \quad (11)$$

onde $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$ é o vetor velocidade do corpo, e \mathbf{F} representa a força resultante sobre ele. Por definição, essa força está conectada a uma variação no momento (2a Lei de Newton). No caso relativístico, essa relação fica

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{P}_{relat}}{dt} \quad (12)$$

onde P_{relat} é o Momento Linear relativístico, que tem a forma dada na Eq. (37.35):

$$\mathbf{P}_{relat} = \gamma_p m \mathbf{u} = \frac{m \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (13)$$

Substituindo as Eqs (12), (13) na eq. (11) temos

$$K = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (\gamma_p m \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} dt$$

Integrando por partes essa expressão:

$$K = (\gamma_p m \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \gamma_p m \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} dt = \gamma_p m u^2 \Big|_{t_i}^{t_f} - m \int_{t_i}^{t_f} \gamma_p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}$$

Esta última integral pode ainda ser reescrita usando a identidade $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \frac{1}{2} d(u^2) \equiv \frac{c^2}{2} dy$, onde definimos a nova variável de integração $y = \frac{u^2}{c^2}$. Expandindo γ_p , e assumindo a condição inicial $u_i = 0$ (repouso), temos então:

$$\begin{aligned} K &= m \frac{u_f^2}{\sqrt{1 - u_f^2/c^2}} - mc^2 \int_0^{u_f^2/c^2} \frac{dy}{2\sqrt{1-y}} \\ &= m \frac{u_f^2}{\sqrt{1 - u_f^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1-y} \Big|_0^{u_f^2/c^2} \\ &= m \frac{u_f^2 + (c^2 - u_f^2)}{\sqrt{1 - u_f^2/c^2}} - mc^2 \\ &= (\gamma_p - 1) mc^2 \quad \square \end{aligned}$$